

1. Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok (20%)

1.1 Halmazok

Ismerje és használja a halmazok megadásának különböző módjait, a halmaz elemének fogalmát.

Definiálja és alkalmazza gyakorlati és matematikai feladatokban a következő fogalmakat: halmazok egyenlősége, részhalmaz, üres halmaz, véges és végtelen halmaz, komplementer halmaz.

Ismerje és alkalmazza gyakorlati és matematikai feladatokban a következő műveleteket: egyesítés, metszet, különbség.

Tudjon koordináta-rendszerben ábrázolni egyszerűbb ponthalmazokat.

Véges halmazok elemeinek száma.

1.2 Matematikai logika

Tudjon egyszerű matematikai szövegeket értelmezni. Ismerje és alkalmazza megfelelően a kijelentés (állítás, ítélet) fogalmát. Értse és egyszerű feladatokban alkalmazza az állítás tagadása műveletet. Ismerje az „és”, a „(megengedő) vagy” logikai jelentését, tudja használni és összekapcsolni azokat a halmazműveletekkel.

Értse és használja helyesen az implikációt és az ekvivalenciát. Használja helyesen a „minden”, „van olyan” kvantorokat. Tudjon definíciókat, tételeket pontosan megfogalmazni. Használja és alkalmazza feladatokban helyesen a „szükséges”, az „elégleges” és a „szükséges és elégleges” feltétel fogalmát.

1.3 Kombinatorika

Tudjon egyszerű sorba rendezési, kiválasztási és egyéb kombinatorikai feladatokat megoldani. Tudja kiszámolni a binomiális együtthatókat.

1.4 Gráfok

Tudjon konkrét szituációkat szemléltetni, és egyszerű feladatokat megoldani gráfok segítségével

2. Számelmélet, algebra (25%)

2.1 Alapműveletek

Tudjon alapműveleteket biztonságosan elvégezni (zsebszámológéppel is).

Ismerje és használja feladatokban az alapműveletek műveleti azonosságait (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás).

2.2 A természetes számok halmaza, számelméleti ismeretek

Ismerje, tudja definiálni és alkalmazni az oszthatósági alapfogalmakat (osztó, többszörös, prímszám, összetett szám).

Tudjon természetes számokat prímtényezőkre bontani, tudja adott számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét kiszámítani; tudja mindezeket egyszerű szöveges (gyakorlati) feladatok megoldásában alkalmazni. Definiálja és alkalmazza feladatokban a relatív prímszámokat.

Tudja a számelmélet alaptételét alkalmazni feladatokban.

Ismerje a 10 hatványaira, illetve a 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számokra vonatkozó oszthatósági szabályokat, tudjon egyszerű oszthatósági feladatokat megoldani.

Tudjon más számrendszerek létezéséről.

Tudja a számokat átírni 10-es alapú számrendszerből 2 alapú számrendszerbe és viszont.

Helyiértékes írásmód.

2.3 és 2.4 Racionális, irracionális és valós számok

Tudja definiálni a racionális számot és ismerje az irracionális szám fogalmát.

Adott n ($n \in \mathbb{N}$) esetén tudja eldönteni, hogy $\sqrt[n]{n}$ irracionális szám-e.

Ismerje a valós számkör felépítését (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{Q}^* , \mathbb{R}) valamint a valós számok és a számegyenes kapcsolatát.

Tudjon ábrázolni számokat a számegyenesen.

Tudja az abszolútérték definícióját.

Ismerje adott szám normálalakjának felírási módját, tudjon számolni a normálalakkal.

2.5. Hatvány, gyök, logaritmus

A hatványozás értelmezése racionális kitevő esetén.

Ismerje és használja a hatványozás azonosságait.

Definiálja és használja az $\sqrt[n]{a}$ fogalmát.

Ismerje és alkalmazza a négyzetgyökvonás azonosságait.

Definiálja és használja feladatok megoldásában a logaritmus fogalmát, valamint a logaritmus azonosságait. Tudjon áttérni más alapú logaritmusra.

2.6 Betűkifejezések

Ismerje a polinom fokszámát, fokszám szerint rendezett alakját. Tudja alkalmazni feladatokban a következő

kifejezések kifejtését, illetve szorzattá alakítását $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$,

Tudjon algebrai kifejezésekkel egyszerű műveleteket végrehajtani, algebrai kifejezéseket egyszerűbb alakra hozni

(összevonás, szorzás, osztás, szorzattá alakítás kiemeléssel, nevezetes azonosságok alkalmazása)

2.7 Arányosság

Tudja az egyenes és a fordított arányosság definícióját és grafikus ábrázolásukat. Tudjon arányossági feladatokat megoldani. Százalékszámítással kapcsolatos feladatok megoldása.

2.8 . Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek

Ismerje az alaphalmaz és a megoldáshalmaz fogalmát. Alkalmazza a különböző egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, ekvivalens átalakítások, következményegyenletre vezető átalakítások, új ismeretlen bevezetése stb. Tudjon elsőfokú, egyismeretlenes egyenleteket megoldani. Kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldása. Alkalmazza az egyenleteket, egyenletrendszereket szöveges feladatok megoldásában. Ismerje az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakját. Tudja meghatározni a diszkrimináns fogalmát. Ismerje és alkalmazza a megoldóképletet. Használja a teljes négyzetté alakítás

módszerét. Alkalmazza feladatokban a gyöktényező alakot. Tudjon törtes egyenleteket, másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatokat megoldani. Másodfokú egyenletrendszerek megoldása. Egyszerű, másodfokúra visszavehető magasabbfokú egyenletek megoldása. Tudjon $\sqrt{ax+b} = cx + d$ típusú egyenleteket megoldani. Tudjon $|ax + b| = c$ típusú egyenleteket algebrai és grafikus módon, valamint $|ax + b| = cx + d$ típusú egyenleteket megoldani. Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő exponenciális és logaritmikus egyenleteket megoldani.

Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő trigonometrikus egyenleteket megoldani. Ismerje az egyenlőtlenségek alaptulajdonságait (mérlegelv alkalmazása). Egyszerű első- és másodfokú egyenlőtlenségek és egyszerű egyismeretlenes egyenlőtlenség-rendszerek megoldása.

2.9 Középtételek, egyenlőtlenségek Két pozitív szám számtani és mértani közepének fogalma, kapcsolatuk és használatuk.

3. Függvények, az analízis elemei (15%)

3.1 A függvény

A függvény matematikai fogalma. Ismerje a függvénytani alapfogalmakat (értelmezési tartomány, hozzárendelés, képhalmaz, helyettesítési érték, értékkészlet). Tudjon szövegesen megfogalmazott függvényt képlettel megadni. Tudjon helyettesítési értéket számítani, illetve tudja egyszerű függvények esetén $f(x) = c$ alapján az x -et meghatározni. Ismerje az egy-egyértelmű megfeleltetés fogalmát. Ismerje és alkalmazza a függvényeket gyakorlati problémák megoldásánál. Az inverzfüggvény fogalmának szemléletes értelmezése (pl. az exponenciális és a logaritmus függvény vagy a geometriai transzformációk).

3.2 Egyváltozós valós függvények

Ismerje, tudja ábrázolni és jellemezni az alábbi hozzárendeléssel megadott (alapvető) függvényeket:

$$x \alpha ax + b; x \alpha x^2; x \alpha x^3; x \alpha ax^2 + bx + c; x \alpha \sqrt{x}; x \alpha |x|$$

$$x \alpha \frac{a}{x}; x \alpha \sin x; x \alpha \cos x; x \alpha \operatorname{tg} x; x \alpha a^x; x \alpha \log_a x$$

Tudjon értéktáblázat és képlet alapján függvényt ábrázolni, illetve adatokat leolvasni a grafikonról. Tudjon néhány lépéses transzformációt igénylő függvényeket függvénytranszformációk segítségével ábrázolni [$f(x) + c$; $f(x + c)$; $c \cdot f(x)$; $f(xc)$]. Egyszerű függvények jellemzése (grafikon alapján) értékkészlet, zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, periodicitás, paritás szempontjából.

3.3 Sorozatok

Ismerje a számsorozat fogalmát és használja a különböző megadási módjait.

Tudjon olyan feladatokat megoldani a számtani és mértani sorozatok témaköréből, ahol a számtani, illetve mértani sorozat fogalmát és az a_n -re, illetve az S_n -re vonatkozó összefüggéseket kell használni. Tudja a kamatos kamatra vonatkozó képletet használni, s abból bármelyik ismeretlen adatot kiszámolni

4. Geometria (25%)

4.1 Elemi geometria

Ismerje és használja megfelelően az alapfogalom, axióma, definiált fogalom, bizonyított tétel fogalmát. Ismerje a térelemeket és a szög fogalmát. Ismerje a szögek nagyság szerinti osztályozását és a nevezetes szögpárokat. Tudja a térelemek távolságára és szögére (pont és egyenes, pont és sík, párhuzamos egyenesek, párhuzamos síkok távolsága; két egyenes, egyenes és sík, két sík hajlásszöge) vonatkozó meghatározásokat. Tudja a kör, gömb, szakaszfelező merőleges, szögfelező fogalmát. Használja a fogalmakat feladatmegoldásokban.

4.2 Geometriai transzformációk

Ismerje a síkbeli egybevágósági transzformációk (eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli forgatás) leírását, tulajdonságaikat. Alkalmazza a feladatokban az eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, egybevágósági transzformációkat. Tudjon végrehajtani transzformációkat konkrét esetekben. Ismerje és tudja alkalmazni feladatokban a háromszögek egybevágósági alapeseteit.

Ismerje fel és használja feladatokban a különböző alakzatok szimmetriáit. Ismerje a transzformációk leírását, tulajdonságait, alkalmazza azokat. Alkalmazza a középpontos nagyítást, kicsinyítést egyszerű, gyakorlati feladatokban. Szakasz adott arányú felosztása. Hasonló alakzatok felismerése, (pl. háromszögek hasonlósági alapesetei) alkalmazása, arány felírása.

Tudja és alkalmazza feladatokban a hasonló síkidomok területének arányáról és a hasonló testek felszínének és térfogatának arányáról szóló tételeket

4.3 Síkbeli és térbeli alakzatok

Ismerje a síkidomok, csoportosítását különböző szempontok szerint. Tudja csoportosítani a háromszögeket oldalak és szögek szerint. Ismerje és alkalmazza az alapvető összefüggéseket háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között (háromszög-egyenlőtlenség, belső, illetve külső szögek összege, nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van). Ismerje és alkalmazza speciális háromszögek tulajdonságait. Tudja a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó definíciókat, tételeket (oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör). Ismereteit alkalmazza egyszerű feladatokban. Ismerje és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását. Ismerje és alkalmazza feladatokban a magasság- és a befogótételt. Ismerje a négyszögek fajtáit (trapéz, paralelogramma, deltoid) és tulajdonságaikat, alkalmazza ismereteit egyszerű feladatokban. Konvex síknégyszög belső és külső szögeinek összege, alkalmazásuk egyszerű feladatokban. Ismerje és alkalmazza konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételeket. Tudja a szabályos sokszögek definícióját. A kör részeinek ismerete, alkalmazása egyszerű feladatokban. Tudja és használja, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, s hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. A szög mérése fokban és radiánban. Tudja és alkalmazza feladatokban, hogy a középponti szög arányos a körívvel és a hozzá tartozó körcikk területével. Tudja és alkalmazza feladatokban a Thalész-tételt és megfordítását. Forgáshenger, forgáskúp, gúla, hasáb, gömb, csonkagúla, csonkakúp ismerete, alkalmazása egyszerű feladatokban.

4.4 Vektorok síkban és térben

Ismerje és alkalmazza feladatokban a következő definíciókat, tételeket:

- vektor fogalma, abszolútértéke,
- nullvektor, ellentett vektor,
- vektorok összege, különbsége, vektor skalárszorosa,
- vektorműveletekre vonatkozó műveleti azonosságok,
- vektor felbontása összetevőkre.

Skaláris szorzat definíciója; tulajdonságai.

Ismerje és alkalmazza feladatokban a következő definíciókat, tételeket:

- vektor koordinátái,
- a vektor 90° -os elforgatottjának koordinátái,
- vektorok összegének, különbségének, skalárral való szorzatának koordinátái
- skalárszorzat kiszámítása koordinátákból. Vektorok alkalmazása feladatokban.

4.5 Trigonometria

Tudja hegyesszögek szögfüggvényeit derékszögű háromszög oldalarányaival definiálni, ismereteit alkalmazza feladatokban. Tudja a szögfüggvények általános definícióját. Tudja és alkalmazza a szögfüggvényekre vonatkozó alapvető összefüggéseket: pótszögek, kiegészítő szögek, negatív szög szögfüggvénye, pitagoraszsi összefüggés.

Tudjon hegyes szögek esetén szögfüggvényeket kifejezni egymásból.

Ismerje és alkalmazza a nevezetes szögek (30° , 45° , 60°) szögfüggvényeit.

Tudja és használja a szinusz- és a koszinusz-tételt. Tudjon számolásokat végezni általános háromszögben.

4.6 Koordinátageometria

Tudja AB vektor koordinátáit, abszolútértékét. Két pont távolságának, szakasz felezőpontjának, harmadoló pontjainak felírása, alkalmazása feladatokban A háromszög súlypontja koordinátáinak felírása, alkalmazása feladatokban.

Tudja felírni különböző adatokkal meghatározott egyenesek egyenletét. Egyenesek metszéspontjának számítása.

Ismerje egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének koordinátageometriai feltételeit.

Elemi háromszög- és négyszög-geometriai feladatok megoldása koordinátageometriai eszközökkel. Adott középpontú és sugarú körök egyenletének felírása. Kétismeretlenes másodfokú egyenletből a kör középpontjának és sugarának meghatározása. Kör és egyenes metszéspontjának meghatározása.

A kör adott pontjában húzott érintő egyenletének felírása.

Alkalmazza ismereteit feladatokban.

4.7 Kerület, terület

Ismerje a kerület és a terület szemléletes fogalmát.

Háromszög területének kiszámítása különböző adatokból: $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$; .

Nevezetes négyszögek területének számítása.

Szabályos sokszögek kerületének és területének számítása.

Kör, körcikk, körszelet kerülete, területe.

Kerület- és területszámítási feladatok.

4.8 Felszín, térfogat

Ismerje a felszín és a térfogat szemléletes fogalmát.

Hasáb, gúla, forgáshenger, forgáskúp, gömb, csonkagúla és csonkakúp felszínének és térfogatának kiszámítása képletbe való behelyettesítéssel.

5. Valószínűség-számítás, statisztika (15%)

5.1 Leíró statisztika

Tudjon adott adathalmazt szemléltetni. Tudjon adathalmazt táblázatba rendezni és táblázattal megadott adatokat feldolgozni. Értse a véletlenszerű mintavétel fogalmát. Tudjon kördiagramot és oszlopdiagramot készíteni. Tudjon adott diagramról információt kiolvasni. Tudja és alkalmazza a következő fogalmakat: osztályba sorolás, gyakorisági diagram, relatív gyakoriság. Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat:

- aritmetikai átlag (súlyozott számtani közép),
- medián (rendezett minta közepe),
- módusz (leggyakoribb érték).

Ismerje és használja a következő fogalmakat: terjedelem, átlagos abszolút eltérés, szórás. Szórás kiszámolása adott adathalmaz esetén számológéppel. Tudjon adathalmazokat összehasonlítani a tanult statisztikai mutatók segítségével

5.2 A valószínűség-számítás elemei

Véges sok kimenetel esetén szimmetria megfontolásokkal számítható valószínűségek (egyenlő esélyű elemi eseményekből) egyszerű feladatokban. Esemény, eseménytér konkrét példák esetén. A klasszikus (Laplace)-modell ismerete. Szemléletes kapcsolat a relatív gyakoriság és a valószínűség között. Valószínűségek kiszámítása visszatevéses mintavétel esetén, binomiális eloszlás.

KÖZÉPSZINTŰ VIZSGA MATEMATIKÁBÓL

A vizsga szerkezete

A középszintű matematika érettségi 180 perces írásbeli vizsga. Szóbeli vizsgát azok a tanulók tehetnek, akiknek az írásbeli vizsgájuk sikertelen (nem érték el az elégséges szintet), de az írásbeli vizsgapontszám 12%-át elérték. Mind az írásbeli, mind pedig a szóbeli vizsgán használható függvénytáblázat (egyidejűleg akár többféle is) és számológép.

Tartalmi szerkezet

A feladatsor tematikailag lefedi a követelményrendszer 5 nagy témakörét.

A feladatsor összeállításakor az alábbi tartalmi arányok az irányadók:

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok	20%
Aritmetika, algebra, számelmélet	25%
Függvények, az analízis elemei	15%
Geometria, koordináta geometria, trigonometria	25%
Valószínűség-számítás, statisztika	15%

Ezek az arányok természetesen csak hozzávetőlegesek lehetnek, hiszen a feladatok egy jelentős része több témakörbe is besorolható, összetett ismeretkörre épül, továbbá a feladatsor választható feladatokat tartalmazó részei miatt az egyes tanulók számára – a választásaiktól függően – az arányok eltolódhatnak. Az első témakörbe tartozik a feladatoknak minden olyan részlete, amely a szöveg matematikai nyelvre való lefordítását, matematikai modellalkotást igényel.

A feladatsor feladatainak 30–50%-a a hétköznapi élet problémáiból indul ki, esetenként egyszerű modellalkotást igénylő feladat.

A feladatsor jellemzői

A feladatsor két, jól elkülönülő részből áll.

Az *I. rész* 10-12 feladatot tartalmazó feladatlap, amely az alapfogalmak, definíciók, egyszerű összefüggések ismeretét hivatott ellenőrizni. Ebben a részben megjelenhet néhány igaz-hamis állítást tartalmazó vagy egyszerű feleletválasztós feladat is, de a feladatok többsége nyílt végű. Az első rész megoldására 45 perc áll rendelkezésre, vagyis ezen idő eltelte után e feladatok megoldására nincs tovább mód.

A feladatsor *I. részében* összesen *30 pont* érhető el.

A *II. rész* megoldási időtartama 135 perc. Ez további két részre oszlik, melynek megoldása folyamatos, az adott időn belül nem korlátozott.

A *II./a rész* 3, egyenként 9-14 pontos feladatot tartalmaz. A feladatok egy vagy több kérdésből állnak.

A *II./b rész* 3, egyenként 17 pontos feladatot tartalmaz, amelyből 2-t kell megoldani, és csak ez a kettő értékelhető, a *II./a* részben leírtakhoz hasonlóan. A feladatok a középszintű követelmények keretein belül összetett feladatok, általában több témakört is érintenek és több részkérdésből állnak.

A *II./a* és *II./b* rész megoldására fordított időt a jelölt szabadon használhatja fel.

Értékelés

Az írásbeli vizsgán elérhető pontszám 100 pont.

A dolgozatok javítására részletes javítási útmutató szolgál. A javítási útmutató tartalmazza a feladatok részletes megoldását, esetenként több változatot is, valamint az egyes megoldási lépésekre adható részpontszámokat.

Szóbeli vizsga

Tartalmi szerkezet

A szóbeli vizsgára legalább 10 tételt kell készíteni, amennyiben a vizsgázó csoportban van szóbeli vizsgára utasított tanuló. A tételsor tartalmi arányai az írásbeli vizsga leírásánál meghatározott arányokat tükrözzék.

A tételek jellemzői

A tétel tartalmazzon 3 egyszerű elméleti kérdést (definíciót, tételkimondást), valamint 3 feladatot. A tétel egyes elemei más-más témakörből kerüljenek kiválasztásra.

Értékelés

A szóbeli vizsgán elérhető pontszám 50 pont.

Az értékelés szempontjai:

1. Az elméleti kérdés összesen

15 pont

2. A három feladat összesen

30 pont

3. Önálló teljesítményre való képesség, a feladatok logikus előadása, illetve a matematikai kommunikációs képesség

5 pont

Azt, hogy az utolsó 5 pontból mennyit kap a vizsgázó, annak a mérlegelésével kell eldönteni, hogy a jelölt milyen mértékben tudott önállóan megbirkózni a kérdésekkel, illetve a feladatokkal, ha segítő kérdésekre volt szüksége, azokat megértette-e és a feleletében fel tudta-e használni. Itt kell értékelni azt is, hogy mennyire volt logikus a felelet felépítése.

A szóbeli vizsgát is tett tanuló végső értékelése az írásbeli és a szóbeli vizsga együttes pontszáma alapján történik